Title	二次形式の行列式の漸近分布について (統計的漸近理論)
Author(s)	早川, 毅
Citation	数理解析研究所講究録 (1972), 167: 10-19
Issue Date	1972-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/106978
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
167巻 1972年 10-19

二次形式の行列式の漸近分布について

統計数理研　早川　毅

$X_{m\times n}$ $(m\leq n)$ の確率密度関数 (p.d.f.) を

$$\pi^{-mn/2}(\det 2\Sigma)^{-n/2}\operatorname{etr}(-\Sigma^{-1}XX'/2)$$

とする. $M_{m\times n}$ の rank を m とする. $A_{n\times n}=\operatorname{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $a_1\geq a_2\geq \geq a_n>0$ とする.

$nZ=\Sigma^{-\frac{1}{2}}(X-M)A(X-M)'\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ の固有根 $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ の p.d.f. は Mixture 表現として

(1) $$f(\Lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}R_\kappa f_\kappa(\Lambda),\quad \text{for}\quad 0<q<a_n,$$

ここで

$$\begin{aligned}f_\kappa(\Lambda)=&\left(\pi^{m^2/2}/\Gamma_m(n/2)\Gamma_m(m/2)\right)(n/2q)^{mn/2}\\&\cdot\operatorname{etr}(-n\Lambda/2q)(\det\Lambda)^{(n-m-1)/2}\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)\\&\cdot C_\kappa(n\Lambda/2q)/((n/2)_\kappa C_\kappa(I_m)),\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}k!R_\kappa=&\operatorname{etr}(-\Sigma^{-1}MM'/2)(\det A/q)^{m/2}\\&\cdot(-1)^k P_\kappa\left(i\Sigma^{-\frac{1}{2}}M(A/q-I)^{-\frac{1}{2}}/\sqrt{2},\ I-qA^{-1}\right)\end{aligned}$$

であり, R_κ's は

$$R_\kappa > 0, \quad \textit{with probability } 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} R_\kappa = 1$$

をみたしている.

また $P_\kappa(T, A)$ は

$$\mathrm{etr}(-TT')P_\kappa(T, A)$$
$$= (-1)^k \pi^{-mn/2} \int_U \mathrm{etr}(-2iTU')\,\mathrm{etr}(-UU')\,C_\kappa(UAU')\,dU$$

により定義され,

$$P_{(1)}(T, A) = -m/2\cdot \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}\,TAT'$$

$$P_{(2)}(T, A) = \frac{1}{3}\Big[\frac{m(m+2)}{4}\{(\mathrm{tr}A)^2 + 2\,\mathrm{tr}A^2\}$$
$$-(m+2)\{2\,\mathrm{tr}\,TA^2T' + \mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}\,TAT'\}$$
$$+(\mathrm{tr}\,TAT')^2 + 2\,\mathrm{tr}(TAT')^2\Big]$$

$$P_{(1^2)}(T, A) = \frac{1}{3}\Big[\frac{m(m-1)}{2}\{(\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}A^2\}$$
$$+2(m-1)\{\mathrm{tr}\,TA^2T' - \mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}\,TAT'\}$$
$$+2\{(\mathrm{tr}\,TAT')^2 - \mathrm{tr}(TAT')^2\}\Big]$$

$$\sum_\kappa P_\kappa(T, A) = (-1)^k k!\Big[A_k + \frac{1}{2}\sum_{l_1+l_2=k} A_{l_1}A_{l_2} + \frac{1}{3!}\sum_{l_1+l_2+l_3} A_{l_1}A_{l_2}A_{l_3}$$
$$+\cdots+ A_1^k/k!\Big],$$

ここで

$$A_l = \frac{m}{2l}\,\mathrm{tr}A^l - \mathrm{tr}\,TA^lT', \quad l = 1, 2, \cdots, k$$

$$A_0 = 0$$

である. [1].

さて, $T^* = T(I+xA)^{-1/2}$, $A^* = (I+xA)^{-1/2}A(I+xA)^{-1/2}$ とし, $\|xA\| < 1$ とすれば,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} \frac{x^k}{k!} P_\kappa(T, A) = \det(I+xA)^{-m/2}\,\mathrm{etr}\{T(I-(I+xA)^{-1})T'\}$$

$(= d(x, T, A)$ とする$)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} \frac{x^k}{(k-1)!} P_\kappa(T, A) = d(x, T, A)\, x\, P_{(1)}(T^*, A^*)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} \frac{x^k}{(k-2)!} P_\kappa(T, A) = d(x, T, A)\, x^2 \sum_{(2)} P_\kappa(T^*, A^*)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} \frac{x^k}{(k-3)!} P_\kappa(T, A) = d(x, T, A)\, x^3 \sum_{(3)} P_\kappa(T^*, A^*)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} \frac{x^k a_1(\kappa)}{k!} P_\kappa(T, A) = d(x, T, A)\left[P_{(2)}(T^*, A^*) - \frac{1}{2}P_{(1^2)}(T^*, A^*)\right]$$

となり, $\sum_{(3)} P_\kappa(T^*, A^*)$ は $k=3$ の分割 (3), (21), (1^3) に対応した $P_\kappa(T^*, A^*)$ についての和を示す. $a_1(\kappa) = \sum_{\alpha=1}^{m} k_\alpha(k_\alpha - \alpha)$.

$P_\kappa(T, I_n) = H_\kappa(T)$, $P_\kappa(0, A) = (-1)^k (m/2)_\kappa C_\kappa(A)$ であるから, Hermite 多項式 $H_\kappa(T)$ (Laguerre 多項式 $(-1)^k L_\kappa^{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{2}}(TT')$), 二項係数展開の和の式を得る.

また, (2)の関係より,

$$B_1 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} k R_\kappa = m\,\mathrm{tr}(A/q - I) + \mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}MAM'/q$$

$$B_2 = 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} k(k-1) R_\kappa = \frac{m^2}{2}\{\mathrm{tr}(A/q - I)\}^2 + m\,\mathrm{tr}(A/q - I)^2$$
$$+ m\,\mathrm{tr}(A/q - I)\,\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}MAM'/q + \frac{1}{2}\{\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}MAM'/q\}^2$$

$$+2\,tr\,\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)M'.$$

$$B_3=4\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}k(k-1)(k-2)R_\kappa$$
$$=\frac{m^3}{2}\{tr(A/g-I)\}^3+3m^2tr(A/g-I)tr(A/g-I)^2+m\,tr(A/g-I)^3$$
$$+\frac{3}{2}\{m^2(tr(A/g-I))^2+2m\,tr(A/g-I)^2\}tr\,\Sigma^{-1}MAM'/g$$
$$+\frac{3}{2}m\,tr(A/g-I)\{(tr\,\Sigma^{-1}MAM'/g)^2+4\,tr\,\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)M'\}$$
$$+12\,tr\,\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)^2M'+6\,tr\,\Sigma^{-1}MA/gM'\,tr\,\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)M'$$

$$B_4=4\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}a_1(\kappa)R_\kappa$$
$$=m\{tr(A/g-I)\}^2+m(m+1)tr(A/g-I)^2$$
$$+2(m+1)tr\,\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)M'+tr(\Sigma^{-1}MA/gM')^2$$
$$+2\,tr(A/g-I)tr\,\Sigma^{-1}MA/gM'.$$

である.

さて (1)を用いて, $\lambda=\sqrt{n/2m}\,\log\{det(Z/g)\}$ の特性関数 $\varphi(t)$ は,

$$\varphi(t)=\left(\frac{2}{n}\right)^{itm\sqrt{n/2m}}\frac{\Gamma_m\left(\frac{n}{2}+it\sqrt{n/2m}\right)}{\Gamma_m(n/2)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}R_\kappa\frac{\left(n/2+it\sqrt{n/2m}\right)_\kappa}{(n/2)_\kappa}.$$

となる. よって Gamma 関数の Stirling の公式より,

$$\varphi(t)=\exp(-t^2/2)\Big[1-\frac{1}{\sqrt{2mn}}\sum_{\alpha=1}^{2}l_{1\alpha}(it)^{2\alpha-1}$$
$$+\frac{1}{2mn}\sum_{\alpha=1}^{3}l_{2\alpha}(it)^{2\alpha}$$
$$-\frac{1}{2mn\sqrt{2mn}}\sum_{\alpha=1}^{5}l_{3\alpha}(it)^{2\alpha-1}+O(1/n^2)\Big].$$

であり，

$$l_{11} = mp - B_1, \quad l_{12} = 1/3$$

$$l_{21} = B_2 - mpB_1 + mp(mp+2)/2 \quad l_{22} = (mp+1-B_1)/3$$

$$l_{23} = 1/18$$

(3) $$l_{31} = m^2(2m^2+3m-1)/6 + mB_4$$

$$l_{32} = mp(mp+2)(mp+4)/6 - mp(mp+2)B_1/2 + mpB_2 - B_3/3$$

$$l_{33} = (5m^2p^2+20mp+12)/30 - (mp+1)B_1/3 + B_3/3$$

$$l_{34} = (mp+2-B_1)/18, \quad l_{35} = 1/162$$

であり，$p=(m+1)/2$ とする．我々はこれらの係数が有限であるために，$\lim_{n\to\infty} tr(A/g - I_n) < \infty$，$\lim_{n\to\infty} tr\,\Sigma^{-1}MM' < \infty$ を仮定する必要が有る．以上をまとめて次の定理を得る．

[定理 1]

$X_{m\times n}$ の p.d.f. を(1)とする．$M_{m\times n}$ を rank m の行列とし，$A_{n\times n} = diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n > 0$ とする．
$nZ = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(X-M)A(X-M)'\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ とするとき，$\lambda = \sqrt{n/2m}\,\log\{\det(Z/g)\}$ の分布の漸近展開式は，$\lim_{n\to\infty} tr(A/g - I) < \infty$，$\lim_{n\to\infty} tr\,\Sigma^{-1}MM' < \infty$ のもとで，

(4) $$P(\lambda \le x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2mn}}\sum_{\alpha=1}^{2} l_{1\alpha}\Phi^{(2\alpha-1)}(x) + \frac{1}{2mn}\sum_{\alpha=1}^{3} l_{2\alpha}\Phi^{(2\alpha)}(x) + \frac{1}{2mn\sqrt{2mn}}\sum_{\alpha=1}^{5} l_{3\alpha}\Phi^{(2\alpha-1)}(x) + O(1/n^2)$$

として表現できる．$l_{i\alpha}$'s は(3)で与えられる。

(系1) (4)で $M=O$ とすれば, (4)は [2;(7)] と同じになる.

(系2) (4)で $g=1$, $A=I_n$ とすれば, (4)は [3;(3,16)] と同じとなる. 但し前述の導出法は成立していない.

$mnT=\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}(X-M)A(X-M)'$ の p.d.f. の Mixture 型表現は

$$(5)\quad \left(\frac{mn}{2g}\right)^{mn/2}\left(1/\Gamma(mn/2)\right)\exp(-mnT/2g)\,T^{mn/2-1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(mnT/2g)^k/(mn/2)_k\cdot\sum_{\kappa}R_\kappa,\qquad 0<g<a_n$$

として与えられる。故に次の定理を得る.

[定理2]

T の p.d.f. が (5) で与えられるとき, $x=\sqrt{mn/2}\,\log(T/g)$ の p.d.f. の漸近展開式は, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{tr}(A/g-I)<\infty$, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}MM'<\infty$ のもとで,

$$(6)\quad f(x)=\phi(x)\left[1+C_1/\sqrt{2mn}+C_2/2mn+C_3/2mn\sqrt{2mn}+O(1/n^2)\right],$$

となり,

$$\phi(x)=\exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}.$$

$$C_1=-\{x^3/3-xB_1\},$$

$$(7)\quad C_2=x^6/18-(1+2B_1)x^4/6+(B_1+B_2)x^2-(A_2+1/3),$$

$$C_3=-\{x^9/162-(1+B_1)x^7/18+(2+15B_1+10B_2)x^5/30-(1+6B_1+21B_2+3B_3)x^3/9+(B_1+12B_2+3B_3)x/3\}$$

(注) $tr\,\Sigma^{-1}(X-M)A(X-M)' = (x-\mu)(\Sigma^{-1}\otimes A)(x-\mu)'$ と表現できる. $x=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_m]$, $X=[x_1'\ x_2'\ \cdots\ x_m']'$, $\mu=[\mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_m]$, $M=[\mu_1'\ \mu_2'\ \cdots\ \mu_m']'$ としている. このことは, 定理1に於て, $m\to 1$, $n\to mn$ (B_1, B_2, B_3, B_4の中の m は変えない), $B_4=2B_2$ とすれば $x=\sqrt{\frac{mn}{2}}\log(T/g)$ の分布関数の漸近展開の式を得ることを示す.

Hill & Davis [4] は Cornish-Fisher type の漸近展開の一般式を得た. その結果を用いれば次の補題を得る.

(補題)

uを標準正規確率変数の p-th percentile とし, xを $x=\sqrt{n/2m}\log(\det(Z/g))$ の p-th percentile とすれば,

$$x = u - D_1/\sqrt{2mn} + D_2/2mn - D_3/2mn\sqrt{2mn} + O(1/n^2),$$

ここで

$$D_1 = mp - 1/3 - m\,tr(A/g-I) - tr\,\Sigma^{-1}MA/g\,M' + u^2/3$$

$$D_2 = \{mp - 4/9 + m\,tr(A/g-I)^2 + 2\,tr\,\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)M'\}u + u^3/9$$

$$D_3 = D_{31} + D_{32}u^2 + D_{33}u^4$$

$$D_{31} = \frac{4m}{9}tr(A/g-I)^3 + m^2\{tr(A/g-I)\}^2 + m(3m^2+3m+2)\,tr(A/g-I)^2/3 + 2(3m^2+3m+2)\,tr\,\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)M'/3$$

$$+2m\,tr(A/g-I)\,tr\Sigma^{-1}MA/g\,M' + m\,tr(\Sigma^{-1}MA/g\,M')^2$$
$$+4\,tr\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)^3M' + m^2(2m^2+3m-1)/6$$
$$-2mp/3 - 116/405$$

$$D_{32} = 2mp/3 - 152/405 - 4m\,tr(A/g-I)^3/9 - 2m\,tr(A/g-I)^2/3$$
$$-4\,tr\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)M'/3 - 4\,tr\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)^2M'$$

$$D_{33} = 4/135.$$

また y を $\sqrt{mn/2}\,tr\Sigma^{-1}(X-M)A(X-M)'/g$ の p-th percentile とすれば，

$$y = u - \overline{D}_1/\sqrt{2mn} + \overline{D}_2/2mn - \overline{D}_3/2mn\sqrt{2mn} + O(1/n^2)$$

となり，

$$\overline{D}_1 = 2/3 - m\,tr(A/g-I) - tr\Sigma^{-1}MA/g\,M' + u^2/3.$$

$$\overline{D}_2 = \{m\,tr(A/g-I)^2 + 2\,tr\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)M' + 5/9\}u$$
$$+ u^3/9.$$

$$\overline{D}_3 = \overline{D}_{31} + \overline{D}_{32}u^2 + \overline{D}_{33}u^4.$$

$$\overline{D}_{31} = -116/405 + 4m\,tr(A/g-I)^3/9 + m\{tr(A/g-I)\}^2$$
$$+\frac{m(3m+5)}{3}\,tr(A/g-I)^2$$
$$+\frac{2}{3}(3m+5)\,tr\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)M'$$
$$+2\,tr(A/g-I)\,tr\Sigma^{-1}MA/g\,M' + tr(\Sigma^{-1}MA/g\,M')^2$$
$$+4\,tr\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)^2M'.$$

$$\overline{D}_{32} = 118/405 - 4m\,tr(A/g-I)^3/9 - 2m\,tr(A/g-I)^2/3$$
$$-4\,tr\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)M'/3 - 4\,tr\Sigma^{-1}MA/g(A/g-I)^2M'.$$

$\cdot \bar{D}_{33} = 4/135.$

以上の結果を複素数正規分布にもとづく二次形式の場合にも平行的に議論できる。詳しくは［5］を参照されたい。

[1] Hayakawa, T. (1972) On the distribution of the multivariate quadratic form in multivariate normal samples. To appear in Ann. Inst. Statist. Math.

[2] Hayakawa, T. (1972). Note on the asymptotic distributions of the functions of an multivariate quadratic form in normal sample. To appear in Ann. Inst. Statist. Math

[3] Fujikosi, Y. (1968). Asymptotic expansion of the distribution of the generalized variance in the non-central case. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A.1. 32. 293–299

[4] Hill, G.W. and Davis, A.W. (1968). Generalized asymptotic expansions of Cornish - Fisher type. Ann. Math. Statist. 39. 1264–1273.

[5] Hayakawa, T. (1972). Further contribution to the asymptotic distribution of the determinant of the non-central multivariate quadratic form.

Research Memorandom No 48. Inst. Statist. Math.